附件 1

教學架構與活動

土木與製圖與數學共學－公共藝術

課程領域	**課前準備：** **資訊教學** **製圖科**	**第一堂：** **課堂教學** **製圖科**	**課前準備：** **校外測量** **土木科、製圖科**	**第二堂：** **課堂教學** **土木科、製圖科**
小主題	**繪圖軟體**	**正十二面體**	**內湖科學園區、台北科技大學公共藝術**	**土木科、製圖科共學學生報告**
時間	二小時	一小時	二小時	一小時
目標	**資訊教學** **製圖教師**教導製圖科學生學習軟體 Solidworks	**數學、製圖** **製圖教師**引起動機：電腦繪圖正十二面體，並切割摺紙	**藝術教育** **數學教師**陪同土木科與製圖科測量正六面體、台北科大方圓之間，並以數學球方程式做驗證	**土木、製圖、數學** **數學教師與製圖教師**引導學生了解數學應用在公共藝術的設計。數學反矩陣如何解未知數
主要教學活動	1.製圖科學生已經具有 AutoCAD 繪圖先備知識 2.能使用 Solidworks 軟體繪圖	1.能說明正多面體有那些形狀 2.能了解內湖明基大樓前正六面體公共藝術	1.能測量內湖園區公共藝術為正六面體 2.能測量並運用餘弦定理計算三角形多面體公共藝術的夾角 3.應用數學反矩陣計算驗證球的方程式	1.公共藝術短片欣賞 2.運用 excel 軟體，與反矩陣求未知數 3.數學餘弦定理與三角形多面體的運用 4.說明內湖科學園區正六面體公共藝術
教學資源	1.Solidworks 軟體 2.PPT 公共藝術說明	1.雷射切割 2.紙 3.膠水 4. PPT	1.內湖科學園區 2.台北科技大學 3.全測站儀等 4. 3D 印表機	1.PPT 2.運用 excel 軟體，反矩陣解聯立方程式求出球半徑
評量	**學習單：**用 Solidworks 軟體繪圖	**作品：** 正十二面體切割與摺紙	**校外教學：** 數學、測量學的應用、excel 軟體	**電腦：**能將測量數據輸入電腦求聯立方程 **學習單：**心得報告

附件 1　　樣張

國家教育研究院
107 年度愛學網系列活動---教師創新教學徵集
教案設計專用表格

教學主題	土木與製圖與數學共學 －公共藝術	**設計者**	管偉宏、詹秉鈞
教學對象	高職三 (土木科) 高職二 (製圖科)	**教學時數**	2 小時
教學對象分析	**學生先備知能分析：** 1.高職一、二年級數學科，學習過的三角函數與幾何單元之基本能力。 2.高職二年級數學科，學習過「圓方程式」單元。 3.土木科：測量學及全測站儀器之使用。AutoCAD繪圖軟體先備知識。 4.製圖科：具備Solidworks繪圖軟體先備知識。 **教材來源：** 高職一年級數學：兩點的直線距離 高職一年級數學：三角函數 高職二年級數學：圓方程式 高職土木科測量學 繪圖軟體AutoCAD、Solidworks等繪圖軟體。		
設計理念	本課程方案以「數學教育」為主軸，**進行跨領域的共學。**  瑞芳高工有悠久的歷史，1934年（昭和 9 年）八田與一創建「財團法人土木測量技術員養成所」。今以公共藝術為媒界，將數學與測量學跨領域結合，思考如何讓從日常生活中發現數學的奧妙，故提出此方案。 本研究在以數學的角度思考生活中的數學，所謂「數學是科學之母」，今從瑞芳高工圓規造型公共藝術為起點。「基石」象徵創校者八田與一先生大刀闊斧的格局與開創性人格特質；並以規劃設計所使用的工具「圓規」剪影，創造出圓規造型。不但期許瑞工莘莘學子皆能「虛心有度」；也象徵著瑞工人立足瑞基、邁開大步、挑戰未來的自我期許，為瑞芳高工刻劃下光耀的歷史軌跡。 「數學科教師」陪同學生至內湖科學園區與台北科技大學校外教學，橫向跨學科合作與統整，輔以高職土木科學生。並搭配「製圖科教師」，使學生從認知、技能到情意的跨領域學習，期能藉由公共藝術，搭配土木科學生測量學的專業技能，及培養製圖科學生電腦繪圖能力。體驗不同的幾何圖形及數學課堂所學如何應用在公共藝術所要表達的涵意。 台北市內湖科學園區明基大樓前的「立方體」，內湖瑞光路「三角形		

	多面體」，台北科技大學「北科鎮寶，方圓之間」進行校外測量。發現在公共藝術產生的過程裡，不僅融入了人文與科學，藉由數學的角度呈現不同的觀察與思考方式，讓同學學習接觸藝術。 本方案以**數學課程建立平台**，99高職**數學科**課程綱要，在目標方面有「能將數學知識與具體世界做連結」、「能應用基本數學解決實際的問題」之敘述。教育部（98年12月）職業學校群科課程綱要暨設備基準－**土木與建築群**，教育目標有「培養學生具備土木與建築群共同核心能力，並為相關專業領域之學習或高一層級專業知能之進修奠定基礎」。**機械群**，教育目標有「培養正確的使用電腦輔助繪圖軟體，並熟悉各種繪圖指令。」之敘述。 教師教學時充分利用社會資源，學生校外參觀，使理論與實務相互結合，並提高學生學習興趣和效果。
教學內容分析	「公共藝術」是一種將藝術創作概念與民眾的公共生活空間結合在一起的藝術活動。[1] 本研究在說明公共藝術不僅要外形美觀，更著重在學術與人文所要傳達的意象。今數學科教師陪同 3 名土木科學生與 1 名製圖科學生至內湖科學園區與台北科技大學進行測量，並將數據資料帶回學校計算與驗證，提供製圖科教師運用 3D 印表機列印模擬。土木科與製圖科學生跨領域的共學，透過數學課為平台共學，其目的讓二科學能了解數學是有用的，讓教師與土木科、製圖科學生能「自發、互動、共好」。 註 1，淺談公共藝術－以台灣為例。杜婕瀅、楊裕富。 **壹、明基大樓前「立方體」**  一、創作發想：拉多斯拉夫・蘇爾托 (Radoslav Sultov) 材質年代：臺灣白大理石，2010 尺寸規格：120 ×120 ×120 公分 這個作品是個立方體，每一邊都有很多四方形一個套一個，這個圖案是個複雜的連續，可以藉由數學或自然形狀來觀察，這雕塑連接內外的空間，方形固定在一個角上，這樣便可觀察到每一個平面。[2] 今運用全測站儀測量立方體的邊長與立方體長寬高的對角線，並以三角函數與畢氏定理驗證，且測量每一層之間的夾角。再利用 Solidworks 軟體繪圖，配合 3D 印表機施作一個二十分之一的實體模型。 註 2、公共藝「數」六部曲 正六面體，明基友達文教基會官網。三民書局數學頻道。 二、假設：若這立方體是正六面體，那麼它就會滿足數學科，畢氏定理與餘弦定理的條件。 三、這個特殊的設計，呈現完美幾何圖形正四面體和等角螺線的關係，觀

察立方體每一面皆為對稱形，而且內部中央為中空的正六面體，且與外圍邊框為平行，因為正方形內角 90 度且各面皆為九層，呈現等角螺線的形狀，所以可以估計每一層為旋轉 10 度呈現三維螺線的關係。

我們利用全測站儀，測量邊界與各點位三維座標，計算邊長與夾角。由於大理石的實體各層凹陷程度不一，利用直尺測量後取其平均值為 4.86cm。並測量第一層至第二層，發現各層的夾角平均值為 $9^o\,52'37''$。該正六面體既邊長平均值為 a=1.197119 公尺，所以運用幾何學畢氏定理其長寬高的對角線為邊長的$\sqrt{3}$倍，今測量正六面體的最高點與最低點距離為 2.07347 公尺，約等於$\sqrt{3}\,a=1.197119\sqrt{3}$公尺，所以可以驗證這個立方體的確是正六面體。

貳、內湖瑞光路「三角形多面體」



一、這個作品是個三角形多面體，不透明的彩光板所組合而成，共有五層，由下而上，最低層有上下各有 18 個三角形。第二層的上下各有 18 個三角形。第三層的上有 12 個三角形，下有 18 個三角形，目視發現該層出現了不等邊三角形。今研究其是否是圓形半球，並運用全測站儀與三角函數計算最低層與第二層之兩個三角形的夾角。

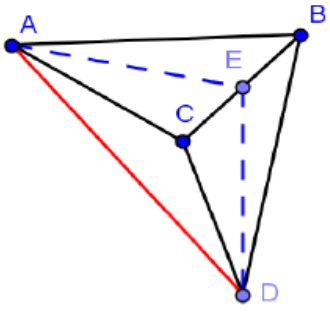
二、假設：

1、若每一面三角形是正三角形，可能這個公共藝術會形成正多面體。

2、有人說：「全測站儀的測量數據可以解決所有測量的問題，不必用到數學。」這合理嗎？

三、測量後，發現每一面並不是正三角形：

這個公共藝術在最低層有 18 個三角形。在幾何學中，十八面體（octadecahedron）是指具有十八個面的多面體。正十八面體不存在，因為沒有一個十八面體是正多面體。測量結果，發現三角形為等腰三角形，而且在第三層發現了不等邊三角形。所以我們可以確定這座公共藝術不是正多面體。



三、原本目測最低層與第二層是正三角形，但實際測量後發現ΔABC 及ΔDBC 皆為等腰三角形。今我們要計算最低層與第二層的夾角∠AED，如右圖，我們可以經由全測站儀求得各點位的三維座標，再計算各點之間的距離，我們必須利用到餘弦定理，因為已知三邊的長$\overline{AE}$、$\overline{DE}$、$\overline{AD}$，求得三角形二平面的夾角$\angle AED=\theta$，$\cos\theta=\dfrac{\overline{AE}^2+\overline{DE}^2-\overline{AD}^2}{2*\overline{AE}*\overline{DE}}$。

在這個實驗我們運用到數學的三角函數餘弦定理。所以全測站儀只是一個輔助的工具，數學才是科學之母。

參、台北科技大學「北科鎮寶，方圓之間」



一、這個作品，方圓之間。中國很早就有天圓地方的說法，《周髀算經》中提到「方屬地、圓屬天，天圓地方」，宇宙天體運行是圓形的，地球上有所謂東西南北四方道之意象。我們運用全測站儀測量球體是否為圓球體，並運用球的方程式及 execl 軟體求出反矩陣，並求出圓球體的半徑。

二、假設：若這個圓球是圓球體，那就必須滿足圓球體的方程式，而且可以求出球的半徑。

三、我們針對球體施作六個點的測量，得到六組三維座標，且任何四點沒有在同一個平面。因為球的方程式有四個係數，所以任取四點代入球的方程式後，由組合公式 $C_4^6=15$，得到 15 組數據，代入球的方程式中，發現此公共藝術的確是一個球體，球的半徑平均為 0.76903m。

本教學方案以「公共藝術」為主軸，讓學生了解公共藝術的建築特色，期許學生具有美學的人文素養，再加上土木科與製圖科學生的共學，可為 108 課綱跨領域學習注入活力，以數學課程建立平台，讓土木科與製圖科的學生同時受益。

教學目標

十二年國教課綱指標

一、高職數學 C 教學綱要，課程目標：

1.引導學生瞭解數學概念與函數圖形，增進學生的基本數學知識。

2.學生基本演算與識圖能力，以應用於解決日常實際問題及未來工程專業及資訊應用領域內實務問題。

3.學生運用計算器與電腦軟體，解決日常實際問題及未來工程專業及資訊應用領域內實務問題。

二、高職土木科測量學教學綱要，課程目標：

1.培養有關測量於土木與建築工程上之基本知識。

2.認識常用之測量儀器，其使用方法及作業方式，進而培訓操作測量儀器之基本技能。

三、高職機械群電腦輔助繪圖與實習教學綱要，課程目標：

1.培養正確的使用電腦輔助繪圖軟體，並熟悉各種繪圖指令。

2.培養電腦輔助繪圖軟體學習繪製正投影視圖、剖視圖、組合圖、相關視圖表達、尺度標註、標準機件之能力。

單元具體目標

一、土木科學生：

1.能測量內湖科學園區明基大樓前正六面體之公共藝術，並證明等角螺線的形狀，計算每一層為旋轉 10 度呈現三維螺線的關係。

2.能測量內湖科學園區三角形多面體之公共藝術，並利用餘弦定理計算二面的夾角。

3.能測量台北科技大學之公共藝術，並由 excel 軟體與反矩陣計算球體的半徑。

4.土木科學生已經具有 AutoCAD 繪圖先備知識，今能了解 Solidworks 軟體繪圖的使用。

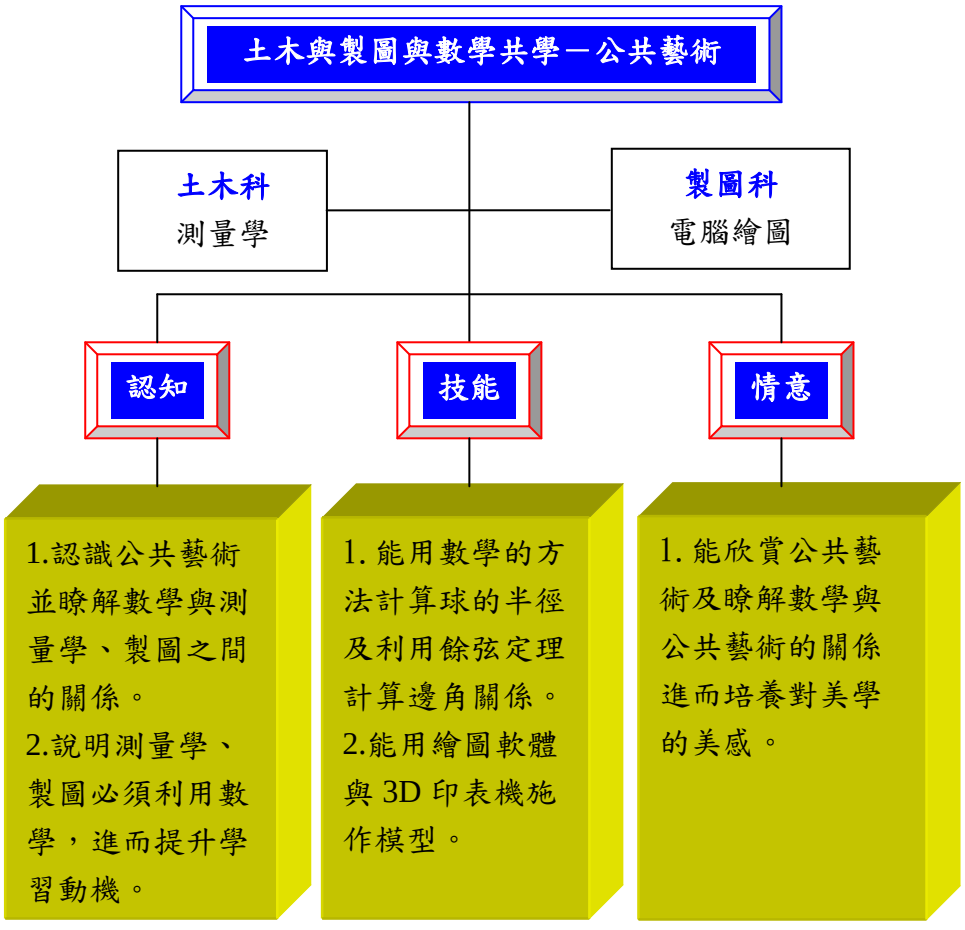
二、製圖科學生：

1.能繪圖內湖科學園區明基大樓前正六面體之公共藝術，並運用 Solidworks 繪圖，運用 3D 印表機施作模型。

2.能針對台北科技大學之公共藝術，並由 excel 軟體與反矩陣計算球體的半徑。

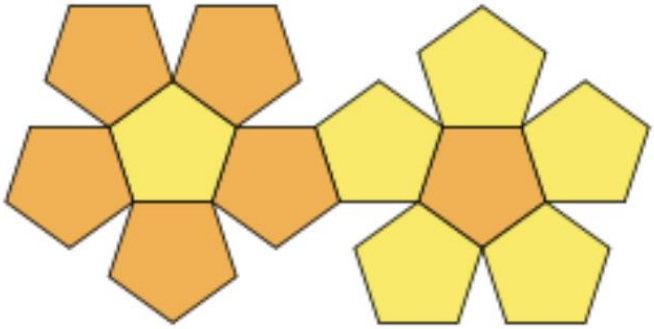
3.能運用 Solidworks 繪出正十二面體，並運用 3D 印表機施作模型。

三、共學目標：



學習評量：

教育的方針需五育並重，評量內容亦應兼具認知（知識）、技能、情意發揮（行為、習慣、態度、理想、興趣、職業道德）及美感等方面，不可偏廢，以利學生健全發展。

節次	教學活動流程	時間	教學資源	教學評量
第一節	**準備階段**	**2**		
	(一) 課堂準備 1.參訪：國立臺灣美術館，正十二面體公共藝術。 2.影片：國立臺灣美術館，攝影 3.雷射切割機。3D 印表機 4.圖紙。 **(二) 引起動機** **壹、引起活動** 《活動一》影片欣賞 國立臺灣美術館，正十二面體公共藝術  正十二面體是 12 個正五邊形所形成的。 		國立臺灣美術館 台中市攝影 維基百科	

《活動二》正十二面體

正十二面體之建構：

以邊長 50ｍｍ長建構正十二面體

依構成正十二面體之數據，須以三角函數算出各頂點之座標方能構成一正十二面體，但因構成之數據如以方程式方式計算各頂點之位置，一般不能達到整數，故除非以程式運算之方式求得各點座標，再輸入繪圖軟體中方能得到正十二面體，一般很難求得正確之數值，因為所得之數據往往是近似值，如此對實際產生一正十二面體即產生困難，故以幾何作圖方式來繪製正十二面體，即可得到真正的多面體，也藉以驗證數學方程式所求得之結果。(正十二面體的各項數據如下表所示)

正十二面體：12 面，30 邊，20 個頂點。

正十二面體幾何數據：

表面積	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2 \approx 20.65a^2$
體積	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3 \approx 7.663a^3$
二面角角度	$\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 116^\circ 57'$
外接球半徑	$\frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}a \approx 1.401a$
內切球半徑	$\frac{a}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}} \approx 1.114a$
對偶多面體	正二十面體

以 3D 繪圖軟體(solidworks)繪製正十二面體

策略：

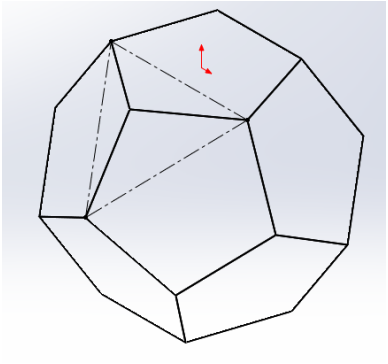
1、觀察正十二面體，每面為正五邊形構成，其三面所夾之頂點與各面之弦長(如圖中心線所示)，正好構成一正三角形，故求得此三角形即可得到正十二面體之另一頂點；再依此頂點建構十二面體之另一正五邊形平面。

2、再利用 3D 軟體繞基準軸之功能以環形陣列方式建構其他的 4 個面；再製作下半部之 5 個面，最後再製作最下面之平面。

3、為方便繪製正十二面體，本例製作方式以面的方式鋪成，再利用 3D 軟體之將各面縫織成實體即可完成正十二面。

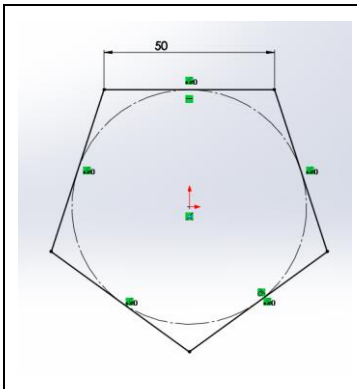
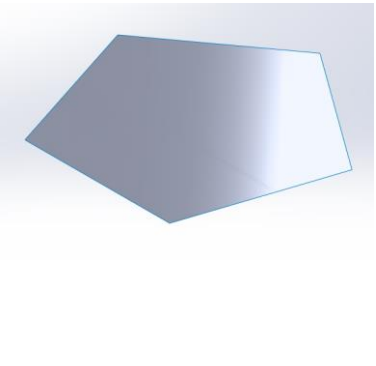
維基百科

電腦繪圖軟體

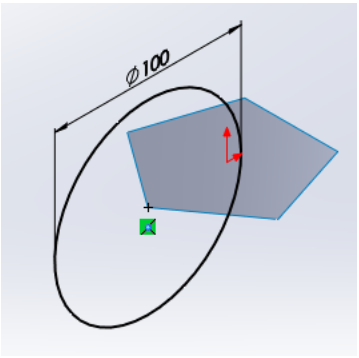
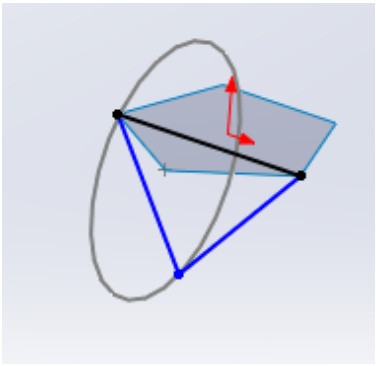
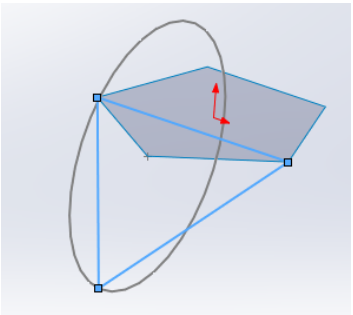
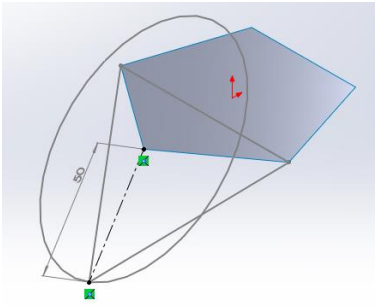


正十二體做法：

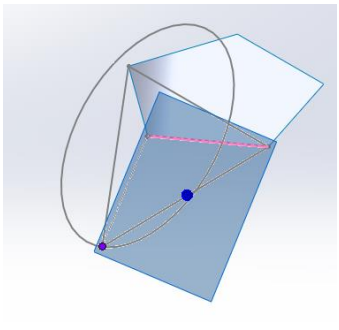
1、先繪製一邊長為 50mm 之正 5 邊形，並鋪成平面。

	
邊長為 50mm 之正 5 邊形	運用曲面工具製作平面

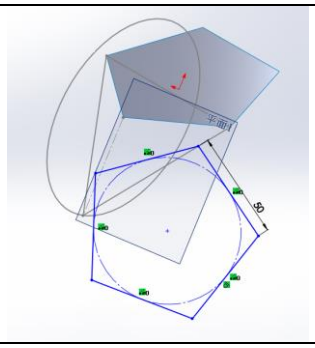
2、運用幾何作圖方式做空間上的正三角形

	
頂點為圓心畫半徑 50 之圓	運用 3D 草圖繪製正三角形
	
將三角形之頂點限制重合在圓上	如此即可得一正三角

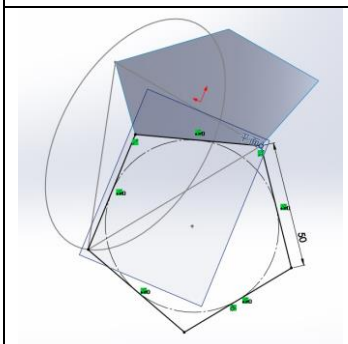
3、以原正 5 邊形的邊及正三角形之頂點做一基準面(一直線與線外之一點)



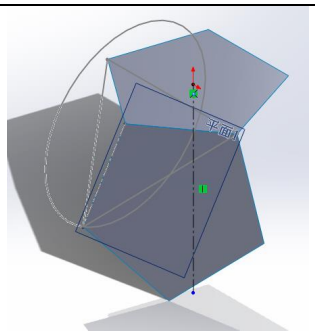
做基準面



在基準面上繪製邊長為 50mm 之正 5 邊形

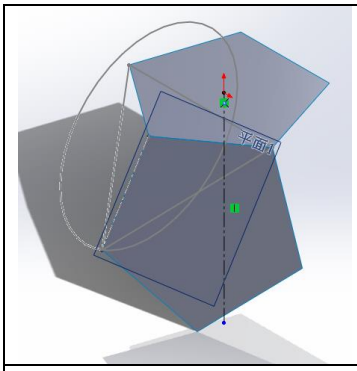


將正 5 邊形之頂點與前面之 5 邊形平面頂點對齊

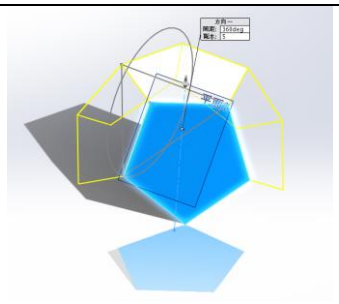


鋪成 5 邊形平面

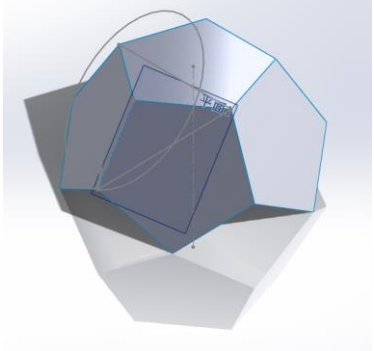
4、運用 3D 軟體環形陣列之功能，將所得之平面複製至正 5 邊形各邊。



製作環形陣列之中心軸

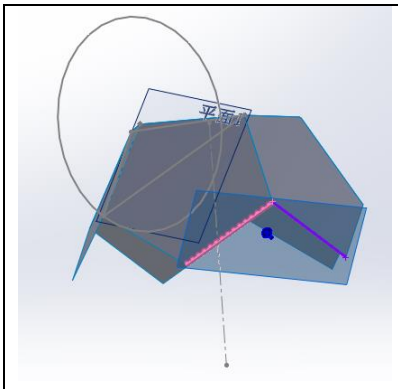
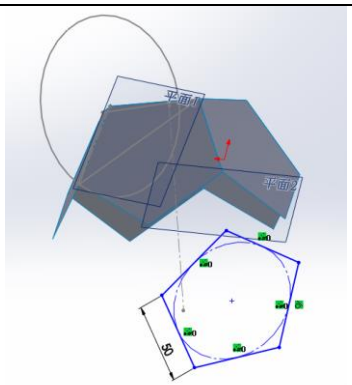
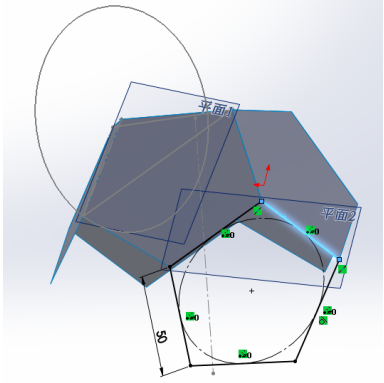
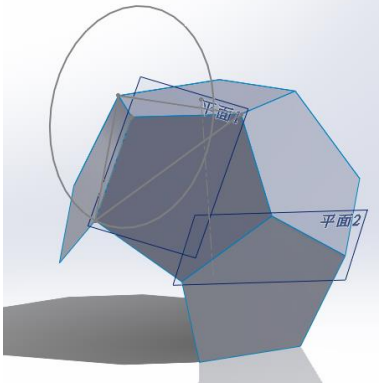
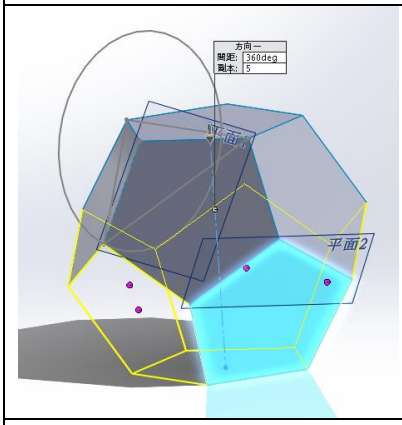
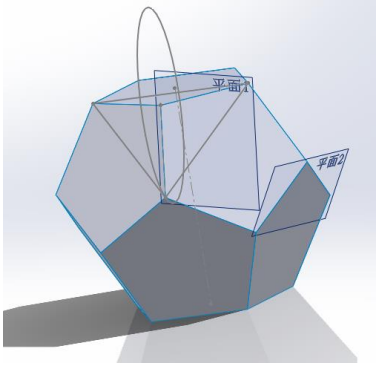


環形陣列複製各面

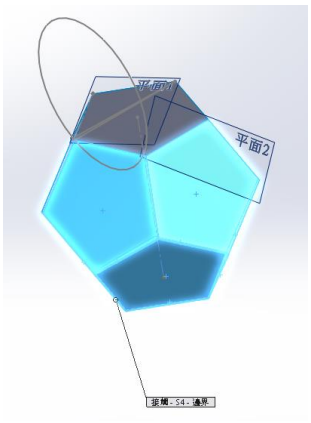
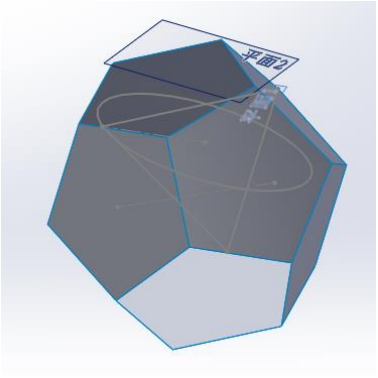


得上半部的 6 個面

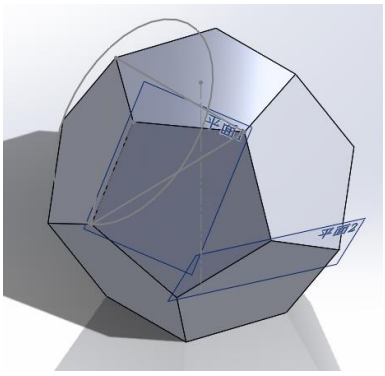
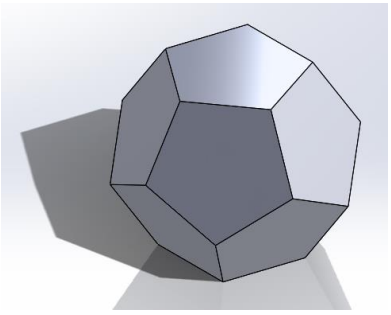
5、繪製下半部之 5 個正 5 邊形平面。

	
運用二直線構成一平面方式製作基準面	在基準面上繪製邊長為 50mm 之正 5 邊形
	
將正 5 邊形之頂點與前面之 5 邊形平面頂點對齊	鋪成 5 邊形平面
	
環形陣列複製各面	得上半部的 5 個面

6、繪製最底部 5 邊形平面。

	
運用軟體最底部之邊界鋪成一平面	即可得最底部之正 5 邊形

7、運用軟體曲面工具，將各面縫織成實體，即可得正十二面體

	
縫織成實體	得正十二面體

驗證各數據

1、二面的夾角：

(1)依數據可得二面夾角約為 116˚57’

(2)取正十二面體二面量測其夾角為 116.56505118 ˚(取小數 8 位)

2、外接球半徑：

(1)依數據可得外接球半徑約為 1.401a(a 為邊長) ;故直徑約為 140.1mm

(2)繪製外接圓可得直徑為 140.12585384(取小數 8 位)

3、內切球半徑：

(1)依數據可得內切球半徑約為 1.114a(a 為邊長) ;故直徑約為 111.4mm

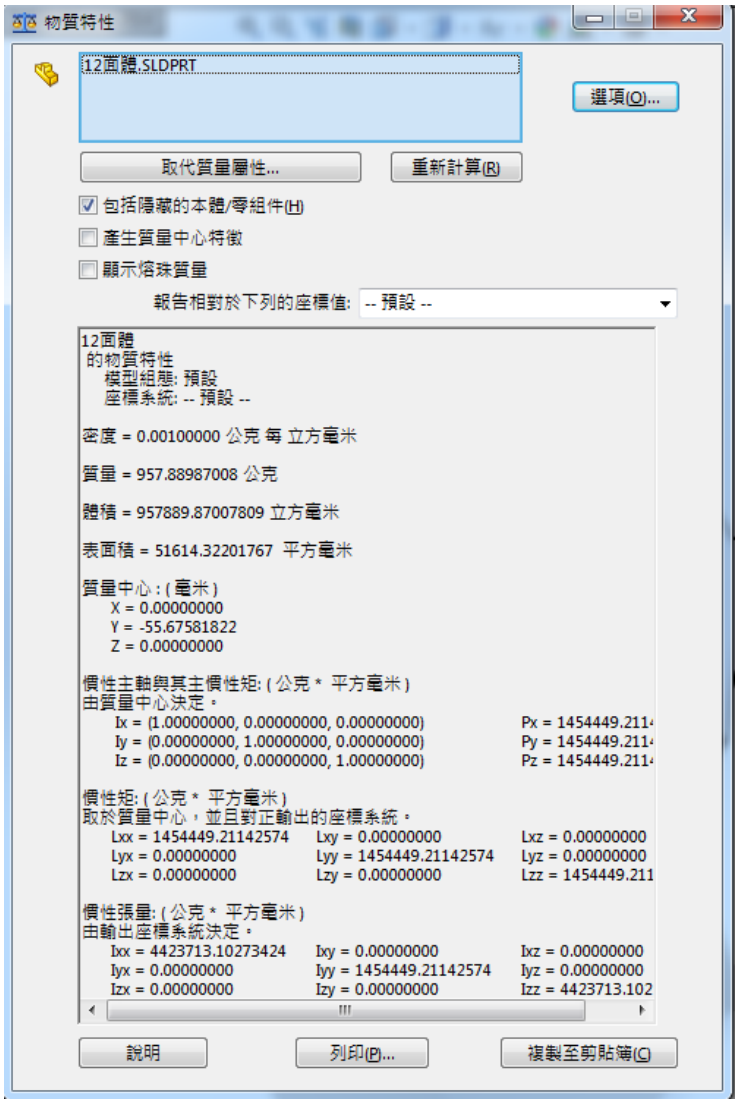
(2)繪製內切圓可得直徑為 111.35163644(取小數 8 位)

4、表面積與體積：

依數據可得表面積約為 20.65 x a^2 ≒51625 mm^2;體積約

為 7.663 x a^3 ≒957875 mm^3

軟體運算為表面積約為 51614.32201767 mm^2(取小數 8 位);體積約為 957889.87007809 mm^3

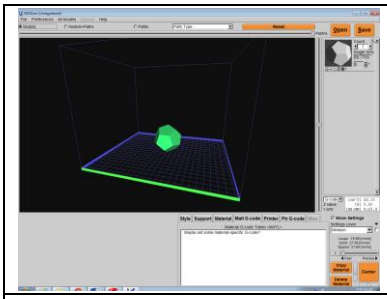


3D 印表機，正十二體之立體實體施作。

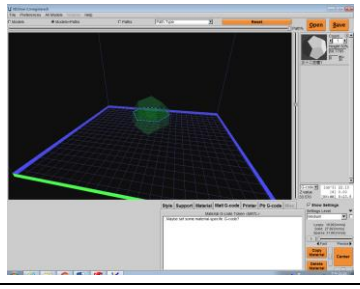
將所得正十二面體之實體，轉成 3D 列印所需檔案(stl 格式),運用 3D 印表機將其列印出實體。

如果有實體可以再做其他的變化(如鏤空變化)

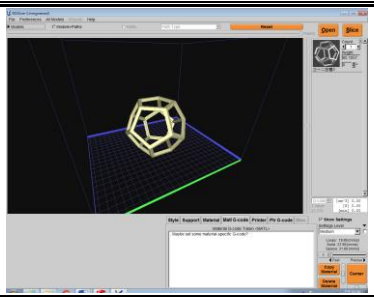
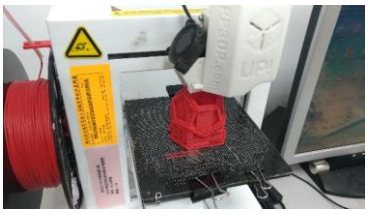
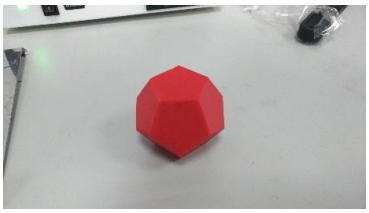
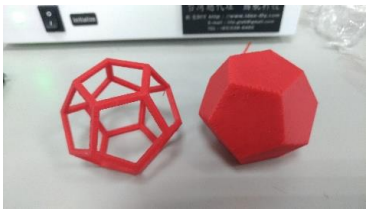
3D 印表機

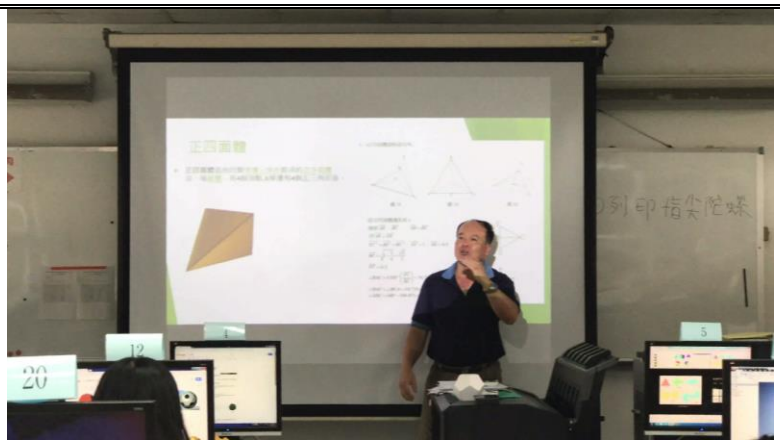


列印軟體模擬(一)



列印軟體模擬(二)

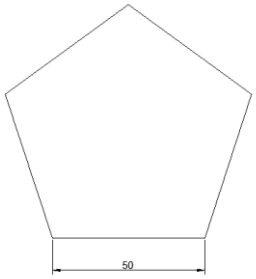
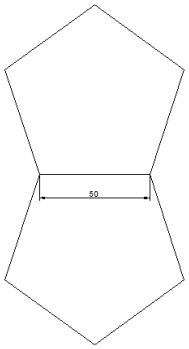
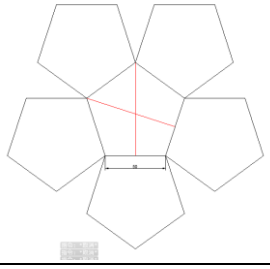
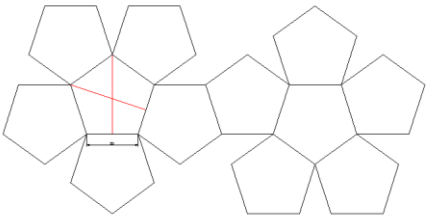
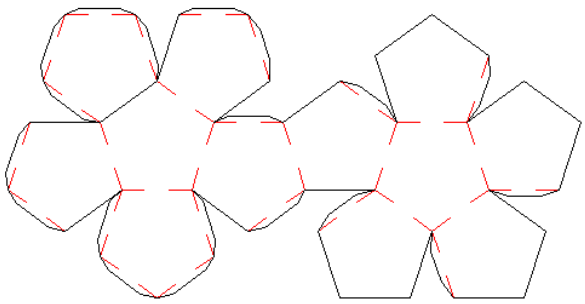
					3D 列印
	列印軟體模擬(三)	列印狀態			
					
	實體成品	實體成品與鏤空變化			
發展階段			**1**		
（一）達成目標 藝術教育：研究顯示，藝術學習對於學生的學術表現與創造力，以及學校的整體學習成就表現，有顯著的成效。因此今日對於學子在藝術學習的投資，將反應在明日就業競爭力。資料來源：藝術學習在教育上的意義，國家教育研究院電子報。 **（二）主要內容／活動** 《活動一》正十二面體圖紙切割 經過，3D 印表機，正十二體之立體實體施作後，同學能了解正五邊形的繪圖，進行以 AutoCAD 軟體繪製正五邊形，再複製至各邊，並請同學分組合作利用圖紙摺成正十二面體。 			1	國家教育研究院電子報	

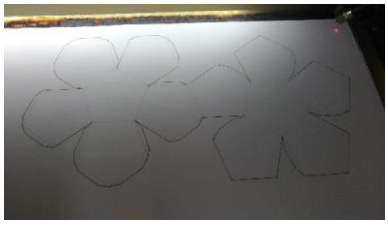
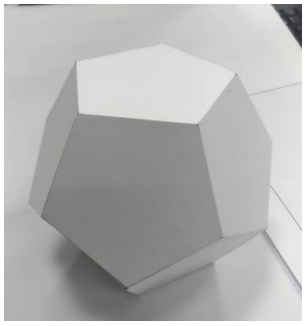
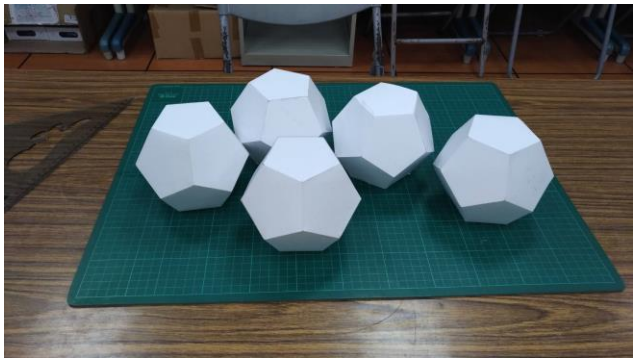


模型驗證

展開圖：

以 AutoCAD 軟體繪製正五邊形，再將其複製至各邊

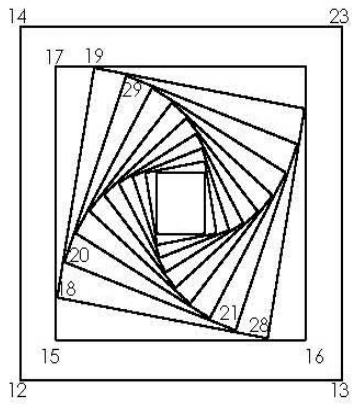
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>先繪製單一邊長 50mm 之正五邊形</td><td>複製正 5 邊形至邊上(鏡射)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>製作中心並環狀複製</td><td>複製另一半之圖形，並對齊一邊</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">製作摺紙黏貼之邊</td></tr>
</table>

	將圖形以雷射切割機切割及劃摺邊的線，即可得模型紙   雷射切割展開圖　　摺成模型 摺紙及黏貼成正十二面體。   		雷射切割機 膠水	正 12 面體成品施作
	總結階段	**0.5**		
	學生了解，生活中有數學 1.將台中美術館醉十二面體的公共藝術，製圖科學生施作一個 3D 模型與施作正五邊形平面再結合成正十二面體，並利用 3D 印表機與雷射切割機實施作品，學生覺得有趣，成功的進行了創造力教學。 2.學生學習公共藝術與數學的關係，活動進行中提升學習動機，發現數學隨時在生活中。			

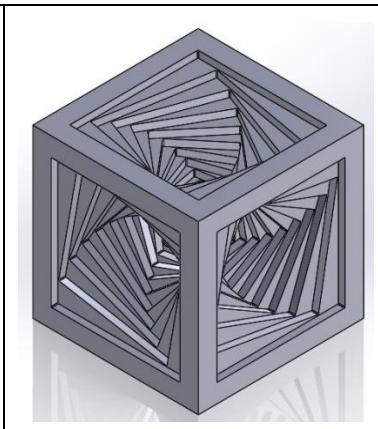
第二節	**準備階段**	**2**		
	(一) 課堂準備 1.參訪：內湖科學圖區公共藝術、台北科技大學公共藝術。 2.影片：數學科教師陪同土木科三名學生、製圖科一名學生，至校外教學影片。 3.全測站儀。 4.PPT。電腦 excel 軟體。 **(二) 引起動機** **壹、引起活動** 《活動一》明基大樓「立方體」 一、選明基電腦公司靠內湖基湖 10 巷之方向為測站，運用全測站儀測量數據與結果，如下表。再運用 3D 印表機製作出一個二十分之一的模型：		全測站儀	測量學

表 立方體測量數據

大邊長	取 12.14.23.13 四點距離的平均值	1.197119m
第一層小邊長	取 15.16.17 三點距離的平均值	0.927071m
第一層邊框	(1.197119－0.927071) / 2	0.135024 m
第一層三角形角度	∠18.15.28，∠18.17.19，∠21.18.20，∠20.19.29 平均值	9^{o} 52’37”
九層的高度平均值	量測每一層的高度，取其平均值	4.86cm



測量點位



3D 列印繪圖



製圖科學生手繪公共藝術平面圖，提供土木科學生定位紀錄



土木科學生實測場景

全測站儀

測量學

《活動二》三角形多面體

一、選內湖瑞光路之方向為測站，施作四個點的三維座標，因為上下皆為等腰三角形，再取點 3 與點 4 的中點，點 6 座標。並利用二點的距離公式，求各點之間的距離，如下圖。

1	點	N	E	Z
2	2	105.612	200	11.435
3	3	106.421	199.524	12.432
4	4	106.026	200.849	12.435
5	5	106.933	200.395	13.272
6	6	106.224	200.187	12.434

各點位座標

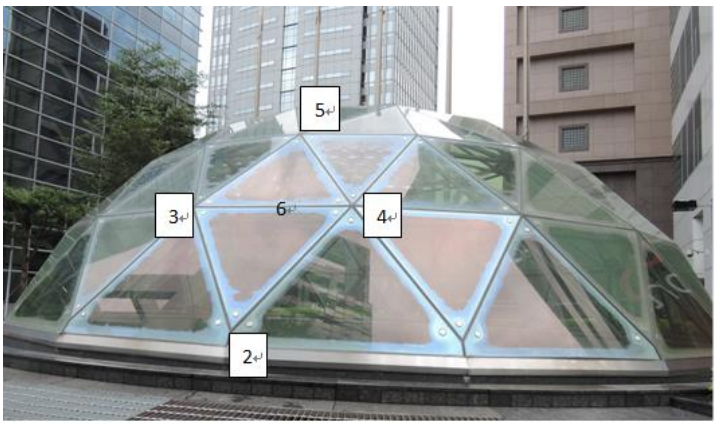
1	二點	距離	二點	距離
2	34	1.383	24	1.376
3	35	1.314	56	1.118
4	54	1.315	26	1.186
5	23	1.369	25	2.297

$\theta = \angle 562$

$$\cos\theta = \frac{\overline{26}^2 + \overline{56}^2 - \overline{25}^2}{2 * \overline{26} * \overline{56}} = \frac{1.186^2 + 1.118^2 - 2.297^2}{2 * 1.186 * 1.118}$$

$$= - \ 0.98786$$

$\theta = 171^o 12' 47''$



《活動三》台北科技大學「北科鎮寶，方圓之間」

一、由測站，任意選六點，且任四點不共平面，將任意四點座標(x，y，z)代入球的方程式，共有 15 組不同的數據，$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，再經由 excel 反矩陣的運算。

1	點	N	E	Z
2	1	110.241	200.723	12.312
3	2	110.457	200.202	12.165
4	3	110.392	201.033	12.093
5	4	110.26	200.543	12.513
6	5	110.345	200.646	11.996
7	6	110.377	201.084	12.561

$AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

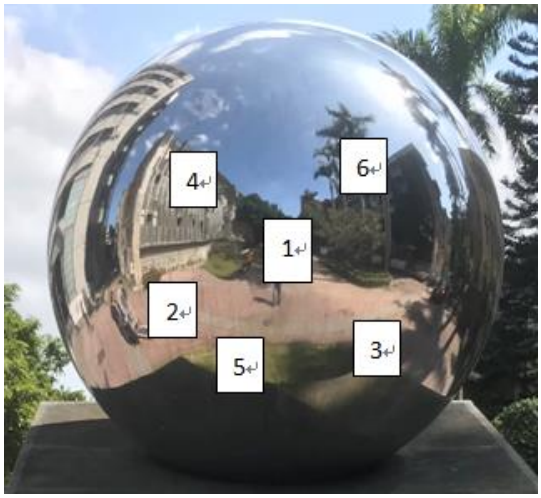
$X = A^{-1}B$

$X = (d \quad e \quad f \quad g)$

半徑 $r = \dfrac{\sqrt{d^2+e^2+f^2-4g}}{2}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
13													
14	N	E	Z		x^2	y^2	z^2	d	e	f	g		
15	110.241	200.723	12.312		12153.08	40289.72	151.5853	110.241	200.723	12.312	1		
16	110.457	200.202	12.165		12200.75	40080.84	147.9872	110.457	200.202	12.165	1		
17	110.392	201.033	12.093		12186.39	40414.27	146.2406	110.392	201.033	12.093	1		
18	110.26	200.543	12.513		12157.27	40217.49	156.5752	110.26	200.543	12.513	1		
19													
20	d	e	f	g		反矩陣					B		X
21	110.241	200.723	12.312	1		-11.2912	0.823788	4.721071	5.746325		-52594.4		-221.97
22	110.457	200.202	12.165	1		-1.32454	-1.24205	1.663015	0.903575		-52429.6		-401.368
23	110.392	201.033	12.093	1		-5.09395	-1.19016	1.042997	5.241111		-52746.9		-24.7772
24	110.26	200.543	12.513	1		1574.333	173.1464	-867.102	-879.378		-52531.3		52744.59
25	先輸入=MINVERSE(原矩陣範圍)												
26	先按F2										半徑=		0.748969
27	再按Ctrl+Shift+enter												

求得 15 組數據的圓球體的半徑，取平均值得圓球體的半徑為 0.76903 公尺。



各點位座標圖

全測站儀

Excel 軟體

測量學

球的方程式

排列組合

	發展階段	**1**		
	（一）達成目標 **土木科三年級與製圖科二年級，全班學生共學：** 1.土木科學生，將測量的理論，對二科的學生說明，製圖科的學生了解土木科測量學的專業。 2.製圖科學生，運用 Solidworks 軟體繪製正六面體模型，對二科的學生說明，土木科的學生了解製圖科繪圖的專業。 3.數學科教師與製圖科教師，從旁補充說明之後，讓二科的學生在這堂科中做了連結，跨領域教學。 4.此次的「跨領域教學」模式，可以做為校內其他各科的經驗分享與交流。 **引起動機：** 《活動一》影片欣賞 影片：圓周率、直徑  **愛學網：**http://stv.moe.edu.tw/co_video_content.php?p=1899 《活動二》影片欣賞 「土木與製圖與數學共學-公共藝術」 學生至內湖科學圖區公共藝術、台北科技大學公共藝術測量數據結果與應用。學生能用數學的角度去欣賞公共藝術之美。 影片：自製影片	1	**愛學網：**圓圓公主的婚紗。第一段，圓圓國的圓圓尺 自製影片	



（二）主要內容／活動

土木與製圖與數學共學- 公共藝術，共聚一堂：

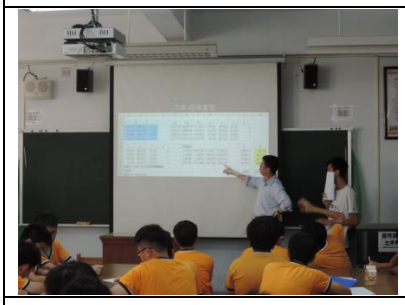
土木科 25 名學生，製圖科 25 名學生，共聚一堂，數學科與製圖科教師共同指導。



土木科學生測量報告



製圖科學生繪圖報告



數學科教師說明圓方程式與球方程式



製圖科教師說明正多面體的繪圖

《活動一》數學課堂教學：電腦 excel 軟體驗證

例、作一圓，使它通過 A(1,1)，B(4,0)，C(5,1)三點？

(法一)代數方法：平面上不共線三點可形成圓。

設所求之圓方程式為

K： $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

因圓 K 通過 A,B,C 三點，所以它們的座標滿足：

$$\begin{cases} 1^2+1^2+d+e+f=0 \\ 4^2+0^2+4d+0e+f=0 \\ 5^2+1^2+5d+e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d+e+f=-2 \\ 4d+f=-16 \\ 5d+e+f=-26 \end{cases}$$

用加減消去法解得 d＝－6，e＝－4，f＝8。

所求之圓方程式為 $x^2+y^2-6x-4y+8=0$

Excel 軟體

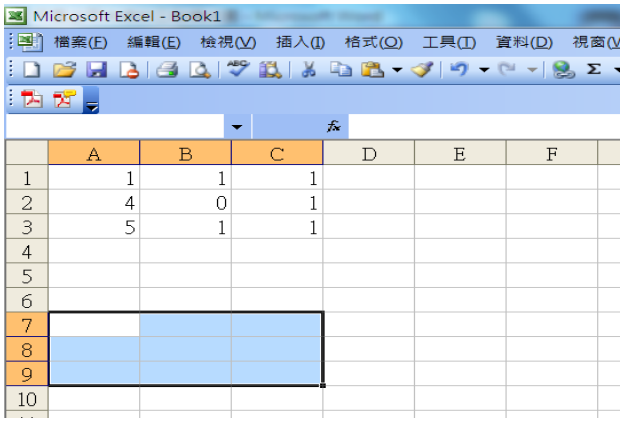
圓方程式

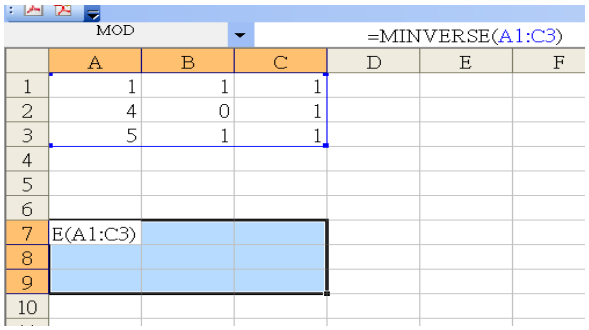
(法二)反矩陣：

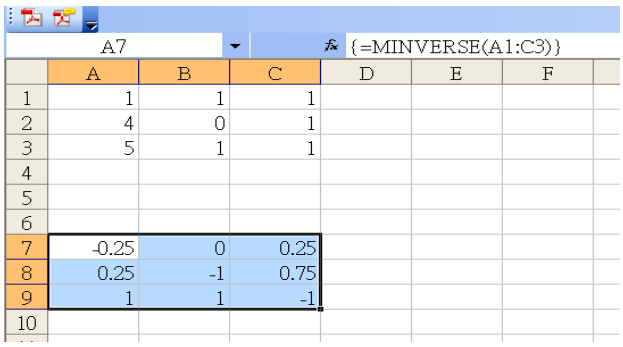
$$\begin{cases} 1^2+1^2+d+e+f=0 \\ 4^2+0^2+4d+0e+f=0 \\ 5^2+1^2+5d+e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d+e+f=-2 \\ 4d+f=-16 \\ 5d+e+f=-26 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -16 \\ -26 \end{bmatrix} \quad 令\ A= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}=?$







	I8			

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1	1					
2	4	0	1					
3	5	1	1					
4								
5								
6	反矩陣				B			
7	-0.25	0	0.25		-2		-6	
8	0.25	-1	0.75		-16		-4	
9	1	1	-1		-26		8	
10								

$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

$AX=B$

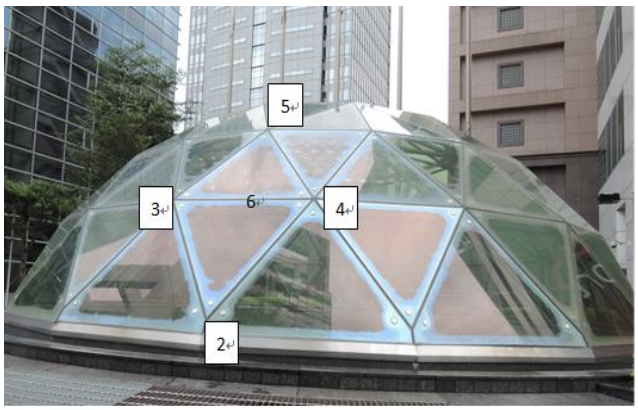
$A^{-1}AX=A^{-1}B$

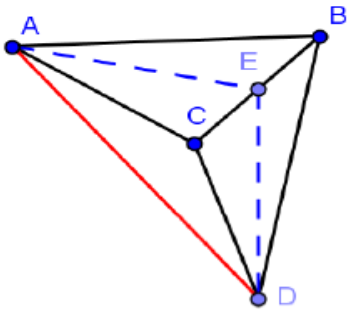
$X=A^{-1}B$

$X=(d \quad e \quad f \quad g)$

半徑 $r=\dfrac{\sqrt{d^2+e^2+f^2-4g}}{2}$

例、求∠562=？





$$\cos\theta=\frac{\overline{26}^2+\overline{56}^2-\overline{25}^2}{2*\overline{26}*\overline{56}}$$

總結階段	**0.5**		
一、土木與製圖與數學共學 1.將公共藝術與數學結合，學生覺得有趣，成功的進行了創造力教學。 2.二科學生學習到，運用矩陣與反矩陣求聯立方程式，且能運用 excel 軟體求反矩陣。		學習單	學習單

	3.土木科的學生了解，經過測量後的數據結果，可以利用製圖科的 3D 印表機列印，學生發現數學隨時在生活中。 4.製圖科的學生了解，公共藝術作品與數學、測量學的關係，提升學生在數學科的學習動機。			

教學過程與回饋（供教師參考）

教學過程紀錄或成果

（請簡述採用本教材，能提高學生學習成效之教學策略及教學流程、教學步驟、教學資源、時間、評量方式等，可含上課教學照片、板書等紀錄。）

一、本方案，將 STEAM，融入課程之中

什麼是 STEAM？

S=Science（科學）

T=Technology（科技）

E=Engineering（工程）

A=Art（藝術）

M=Mathematics（數學）

美國率先提出以 STEM 教育，培養動手做、發明、創新的下一代。STEM 純理工教育有極限，後來再加入藝術（Art）成為 STEAM，期待學習更完整，創造、發明更連結人的溫度和關懷。

STEAM 跟台灣有什麼關係？STEAM 包含：**跨領域、動手做、生活應用、解決問題、五感學習**，強調自我探索、自主學習。教育部在 12 年國民基本教育課程綱要總綱的「核心素養」中表示：素養指人在適應現在生活和面對未來挑戰時，所應具備的知識、能力和態度。與 STEAM 所倡導的學習精神符合。

資料來源：親子天下，頁 94，2017 年 5 月。

二、數學科教師至「國立臺灣美館」拍攝正十二面體公共藝術：



十二面體公共藝術



三座正十二面體環環相扣

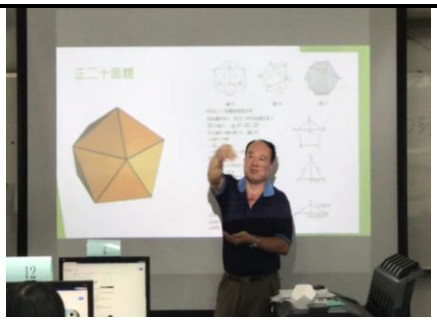
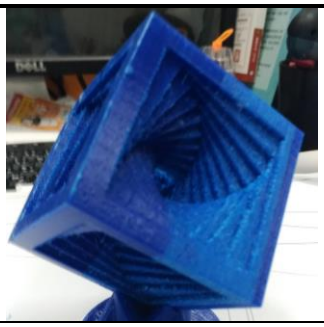
三、製圖科教師 Solidworks 軟體繪圖：



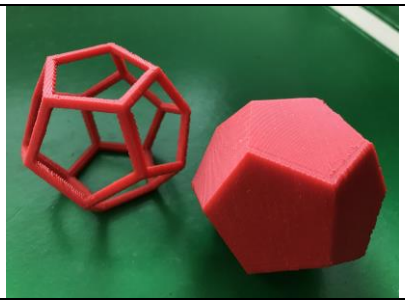
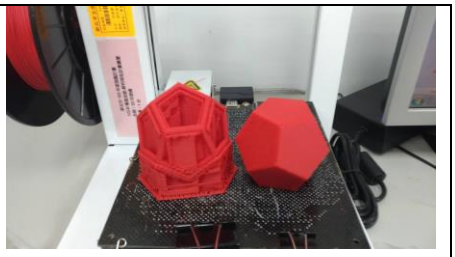
內湖公共藝術



正四面體解說

	
正十二面體理論解說	明基公共藝術 3D 列印(1/20)

四、正十二面體繪圖與實作：

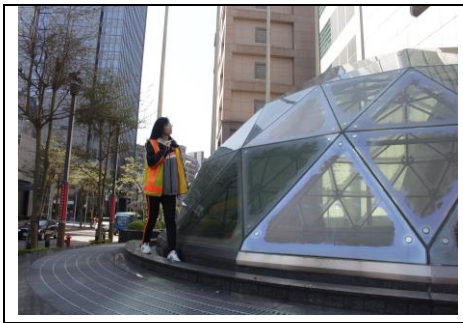
	
正十二面體 3D 列印	3D 印表機列印

五、土木科、製圖科學生校外教學：

1、正六面體

	
正六面體，每一面有 9 層	每一層為旋轉 10 度呈現三維螺線的關係
	
製圖科學生繪圖	土木科學生測量

2、三角形多面體



製圖科學生繪圖



土木科學生測量

3、方圓之間



數學科教師合影



台北科技大學

六、土木科製圖科全班學生共學：

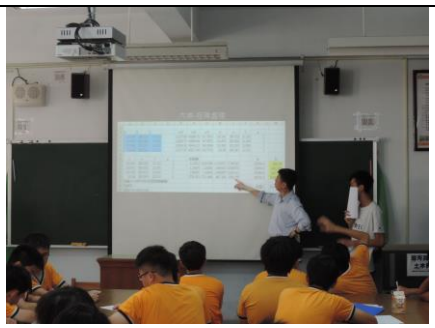
二科教師共同指導



製圖教師指導



二科學生共學



數學教師指導



製圖科學生繪圖解說

回饋意見 **(學生)**	（可提供參與示範教學之學生學習經驗及回饋意見分享）。 一、藉由公共藝術的測量與 3D 列印之後，你看到土木科在測量學的專業、製圖科在電腦繪圖操作的專業，你的心得感想？對你日後學習數學有什麼幫助？ 土木科　姓名：廖義吉 測量公共藝術，土木科在這方面的專業上，把一個實體的物體利用座標的方式呈現，並用鋼捲尺把剩餘測不到的地方量得，藉由草圖將量測的尺寸標示在紙上，以便後續他人使用看得懂。製圖科在方方面的專業上，將現地的物體畫出平面圖，藉由土木科提供的數據，利用繪圖軟體畫出物體，再利用 3D 印表機把畫出物體呈現出來。兩科各有自己的專長，互補各自的缺點，讓成品可以完美的呈現。藉由公共藝術測量，讓我們更了解數學的意思與應用，除了課堂上所教的定義，更可以利用實際應用，使自己對數學更有熱忱。 土木科　姓名：邱晨祐 在科學探究競賽這段期間，我學到很多不同的東西，測量方面，不只重溫了選手時期的訓練過程，還更貼切實地的測量，3D 列印方面，學到了我們課堂上所沒有的機械製圖，也了解了 3D 列印機的內容，更重要的是可以學到更多的數學知識，將數學與實務結合，達到更輕鬆，更能學到東西的學習模式。 製圖科　姓名：方姝茵 原來生活中到處都和數學有關，也第一次知道原來可以用 Excel 計算。本來還想說只是個多面體，只要有尺寸不就可以畫出了嗎，幹嘛還要去測量？結果才知道，只有假設是不夠的，為了能精準接近實際的尺寸，估計全世界建築物大概也倒一半以上了，由此可知，測量、計算很重要！正就讀製圖科的我在繪畫一些機械零件圖的時候，有許多件也是會運用到三角函數，機械力學裡面的東西，一個材料夠不夠硬，所能承受的剪力、應力是多少等等，以及許多研究資料也都會運用到數學。數學活在科技、生活、建築、機械甚至更多，可以說是無所不在，如果沒有數學，估計人類還在史前時代吧！ 製圖科　姓名：詹承斌 在還沒有老師講說及實際操作正多面體組合之前，我看到正六面體時也許還只是略過，因為沒有什麼大不了的，但有聽課深入了解之後，才發現到說一個極其平凡的正多面體，竟然是和數學有密切的關連性，像是用克拉瑪公式或 Excel 求出反矩陣等。可是要取得這些數據，是需要以土木測量的方式求出，我們製圖科只要有數據，就能依靠 3D 繪圖軟體繪出實體圖，而多面體的數據資料卻是由土木科去現場實際測量而得的。還不只這樣，沒有基準點時還得自己定義，測量後數據還得經過精密的數學計算才能證實，可見土木科比我們製圖科要來的辛勤多了，但也因為土木科不辭辛勞的量測及計算才能讓我們能直接以數據轉 3D 實體圖，所以土木科的測量在製圖科的實體建立中，是不可或缺的重要力量。除了測量以外，對於正多面體及數學之間的關連中也多令我知道了一些未

曾聽聞過的新名詞，例如說反矩陣是

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} b2 & b3 \\ c2 & c3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a2 & a3 \\ c2 & c3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a2 & a3 \\ b2 & b3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b1 & b3 \\ c1 & c3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a1 & a3 \\ c1 & c3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a1 & a3 \\ b1 & b3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b1 & b2 \\ c1 & c2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ c1 & c2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

設 $A=\begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{bmatrix}$ 也多認識了球體的方程式 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

和

半徑 $r=\frac{\sqrt{d^2+e^2+f^2-4g}}{2}$

還有三維坐標，sin、cos，跟 Excel 可以求反矩陣等等，諸多新知識，令小生我耳目一新，希望之後也能多舉行一些和生活有關的文學及科學相關教育課程。

《學習單》土木科、製圖科共學心得報告

土木科　　姓名 陽義志

《學習單》

一、藉由公共藝術的測量與3D列印之後，你看到土木科在測量學的專業、製圖科在電腦繪圖操作的專業，你的心得感想？對你日後學習數學有什麼幫助？

測量公共藝術，土木科在這方面的專業上，把一個實體的物體利用座標的方式呈現，並用鋼捲尺把剩餘測不到的地方量得，藉由草圖將量測的尺寸標示在紙上，以便後續他人始用看得懂。製圖科在這方面的專業上，將現地的物體畫出平面圖，藉由土木科提供的數據，利用繪圖軟體畫出物體，再利用3D列印機把畫出物體呈現出來。兩科各有自己的專長，互補各自的缺點，讓成品可以完美的呈現。藉由公共藝術測量，讓我們更了解數學公式的意思與應用，除了課堂上所教的定義，更可以利用實際應用，使自己對數學更有熱忱。

土木科　　姓名 邱晨祐

《學習單》

一、藉由公共藝術的測量與3D列印之後，你看到土木科在測量學的專業、製圖科在電腦繪圖操作的專業，你的心得感想？對你日後學習數學有什麼幫助？

在科學探究競賽這段期間，我學到很多不同的東西，測量方面，不只重溫了選手時期的訓練過程，還更貼近實地的測量，3D列印方面，學到了我們課堂上所沒有的机械製圖，也了解了3D列印机的內容，更重要的是可以學到更多的數學知識，將數學與實務結合，達到更輕鬆，更能學到東西的學習模式。

製圖 科　　姓名 方妹茵

《學習單》

一、藉由公共藝術的測量與3D列印之後，你看到土木科在測量學的專業、製圖科在電腦繪圖操作的專業，你的心得感想？對你日後學習數學有什麼幫助？

原來生活中到處都和數學有關，也第一次知道原來可以用Excel計算。本來還想說只是個多面體，只要有尺寸不就可以畫出了嗎？幹嘛還要去測量？結果才知道，只有假設是不夠的，為了能精準接近實際的尺寸，才需要請土木科使用儀器測量。如果全都用假設的尺寸，估計全世界建築物大概也倒一半以上了，由此可知，測量、計算很重要！正就讀製圖科的我在繪畫一些機械零件圖的時候，有需多件也是會運用到三角函數、機械力學裡面的東西，一個材料夠不夠硬、所能承受的剪力、應力是多少等等，以及許多研究資料也都會運用到數學。數學活在科技、生活、建築、機械甚至更多，可以說是無所不在，如果沒有數學，估計人類還在史前時代吧！

製圖 科　　姓名 詹承翰

《學習單》

一、藉由公共藝術的測量與3D列印之後，你看到土木科在測量學的專業、製圖科在電腦繪圖操作的專業，你的心得感想？對你日後學習數學有什麼幫助？

在還沒有老師講說及實際操作正多面体組合之前，我看到正六面体時也許還只是略過，因為沒有什麼大不了的。但有聽課深入了解之後，才發現到說一個極其平凡的正多面体，竟然是和數學有密切的關連性，像是用克拉瑪公式或Excel求出反矩陣等…可是要取得這些數據，是需要以土木測量的方式求出，我們製圖科只要有數據，就能依靠3D繪圖軟体繪出實体圖。而多面体的數據資料卻是由土木科去現場實際測量而得的，還不只這樣，沒有基準點時還得自己定義，測量後數據還得經過精密的數學計算才能證實，可見土木科比我們製圖科要求的辛勤多了，但也因為土木科不辭辛勞的量測及計算才能讓我們能直接以數據軟3D實体圖，所以土木科的測量在製圖科的實体建立中，是不可或缺的重要力量。除了測量以外，對於正多面体及數學之間的關連中，也多令我知道了一些未曾聽聞過的新名詞，例如說反矩陣是 $\frac{1}{\det(A)}$ 也就是 $\det(A)$ 的倒數 A^{-1}（設 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$），也多認識了球体的方程式（$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$）和半徑（$r=\frac{\sqrt{d^2+e^2+f^2-4g}}{2}$），還有三維坐標、Sin、cos，跟Excel可以求反矩陣等等…諸多新知識，令小生我耳目一新，希望之後也能多舉行一些和生活有關的文考及科學教育課程。

相關

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$